CHUYÊN ĐỀ 9: CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

1. Kiến thức cơ bản:

- Dùng định lý Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, …

Giả sử cần chứng minh: MA.MB = MC.MD

Lập sơ đồ: $MA.MB = MC.MD \Leftarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftarrow \Delta MAD \sim \Delta MCB$ hoặc $\Delta MAC \sim \Delta MDB$

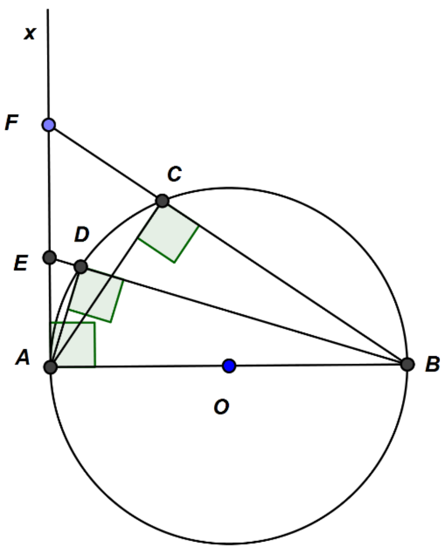
Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O; R), tiếp tuyến Ax. Trên tiếp tuyến Ax, lấy điểm F sao cho BF cắt đường tròn tại C. Tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D.

a) Chứng minh OD // BC.

b) Chứng minh hệ thức: BD.BE = BC.BF



Chứng minh

a) Δ BODcân ở O (vì OD = OB = R)

Suy ra $OBD = ODB$

Mà $OBD = CBD$ (giả thiết) nên $OBD = CBD$

Do đó: OD // BC.

b) Ta có:

$ABD = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

Suy ra $AD \perp BE$.

$ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

Suy ra $AC \perp BF$.

ΔEAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AD $\perp$ BE nên AB^2 = BD.BE (1)

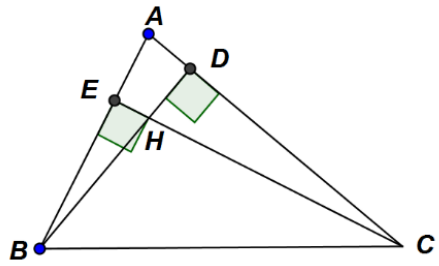
Δ FAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AC $\perp$ BF nên AB^2 = BC.BF (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BD.BE = BC.BF

Bài tập 2: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp.

b) Chứng minh: AD.AC = AE.AB.



Chứng minh

a) Xét tứ giác BCDE, có:

$BDC = 90^0$

$BEC = 90^0$

Ta có hai đỉnh D, E cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

Suy ra tứ giác BCDE nội tiếp.

b) Xét Δ ADB và Δ AEC, ta có:

$ADB = AEC = 90^0$ (vì BD, CE là hai đường cao)

A là góc chung.

Suy ra Δ ADB ∽ Δ AEC (g - g).

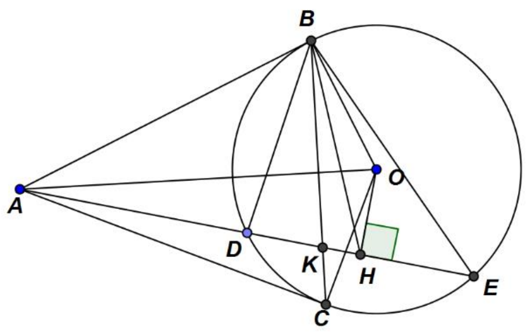
Suy ra $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$

Bài tập 3: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E, dây DE không qua tâm O). Gọi H là trung điểm của DE, AE cắt BC tại K .

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn .

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của BHC

c) Chứng minh: $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE}$.



Chứng minh

a) Ta có: $ABO = ACO = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

Trong tứ giác ABOC có $ABO + ACO = 180^0$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có: AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Suy ra: $AB = AC$

Do đó: $AHB = AHC$.

Vậy HA là tia phân giác của BHC.

c) Chứng minh: $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE}$.

Xét Δ ABD và Δ AEB, có:

BAE là góc chung

$ABD = AEB(=\frac{1}{2}\text{s®}BD)$

Suy ra: Δ ABD ∽ Δ AEB

Do đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (1)

Xét Δ ABK và Δ AHB, có:

BAH là góc chung

$ABK = AHB$ (do $AB = AC$)

Suy ra Δ ABK ∽ Δ AHB.

Suy ra: $\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow AB^2 = AK.AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AE.AD = AK.AH

Suy ra $\frac{1}{AK} = \frac{AH}{AE.AD}$

Suy ra $\frac{2}{AK} = \frac{2AH}{AE.AD} = \frac{2(AD+DH)}{AE.AD} = \frac{2AD+2DH}{AE.AD} = \frac{AD+AD+ED}{AE.AD} = \frac{AE+AD}{AE.AD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$

(do AD + DE = AE và DE = 2DH).

Vậy $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AE}$ (đpcm).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho (O) có đường kính AB. Qua A kẻ tiếp tuyến xy. Lấy điểm M $\in$ Ax; nối BM cắt (O) tại C. Chứng minh: MA^2 = MB.MC.

Bài tập 2: Cho Δ ABC đều, nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cung BC (BC là cung nhỏ). CD và AB kéo dài cắt nhau ở M; BD và AC kéo dài cắt nhau ở N. Chứng minh: AB^2 = BM.CN.

Bài tập 3: Cho Δ ABC có AB < AC. Từ M $\in$ AB vẽ MEF // BC cắt AC tại E và đường thẳng song song AB vẽ từ C tại F. AC cắt BF tại I. Chứng minh: IC^2 = IE.IA.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 36 mm; AD = 24 mm. Từ D nối đến trung điểm M của AB cắt AC tại I và CB kéo dài tại K. Chứng minh: ID^2 = IM.IK.

Bài tập 5: Cho Δ ABC vuông tại A. Vẽ phân giác trong AD của góc A (D $\in$ BC). Gọi khoảng cách từ D đến AB là d. Biết AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh: $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài tập 6: Cho (O; R) và hai dây cung song song nhau AD và BE ở về hai phía của dây AB và cùng hợp với AB một góc 45^0. Nối DE cắt AB tại M. Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MD^2 + ME^2 = 4R^2$.

Bài tập 7: Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng xy theo thứ tự trên. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB.AC$.

Bài tập 8: Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, lấy một điểm P tuỳ ý.

Gọi là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh: $BC^2 = AP.AQ$.

b) Trên AP lấy điểm M sao cho PM = PB. Chứng minh: BP + PC = AP.

c) Chứng minh: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD (AC > BD). Vẽ CE $\perp$ AB và FC $\perp$ AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: FE + EG = 2AM.

Bài tập 11: Cho Cho hình bình hành ABCD, trên Đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} + \frac{CB}{CN}$.

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 12: Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P,Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC (AB = AC) có góc ở đỉnh bằng 20^0; cạnh đáy là a; cạnh bên là b.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài tập 14: Cho Δ ABC có $\hat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài Δ BCD đều. Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài tập 15: Cho Δ ABC cân tại A ($A = 90^0$). Từ B kẻ BM $\perp$ AC. Chứng minh rằng:

$$\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1.$$